BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 3, 1959

15.

MATHEMATIK

Die explizite Bestimmung von einigen Klassen der assoziativen Ringe

von

FERENC A. SZÁSZ

Vorgelegt von K. BORSUK am 3 November 1958

Wir werden in der vorliegenden Note einige spezielle ringtheoretische Fragen und ihre Lösungen ohne Beweis erörtern.

I. Herr L. Fuchs hat alle Gruppen bestimmt [2], deren sämtliche Klassen von untereinander isomorphen Untergruppen endlich sind. Daher kann man auch eine ähnliche Frage für Ringe stellen, die aber noch einer Lösung harrt. Wir nennen einen Ring R mit der Eigenschaft E_1, wenn sämtliche endlich erzeugbare, von 0 und von R verschiedene Unterringe von R untereinander isomorph sind. (Für einen speziellen Fall vgl. [8]).

Wir haben nun den nachstehenden Satz beweist:

SATZ 1. *Alle Ringe mit Eigenschaft E_1 sind:*

1) *die Zeroringe mit torsionsfreier additiven Gruppe und mit dem Rang 1;*

2) *endliche Körper von der Ordnung p^q, wobei p und q Primzahlen sind;*

3) *direkte Summen $R = K_p + K_p$, wobei der endliche Primkörper K_p ein Ideal in R ist;*

4) *Ringe mit zyklischer additiver Gruppe und mit der Ordnung p oder p^2;*

5) *Zeroringe mit der Ordnung p oder p^2 (wobei p eine Primzahl ist);*

6) *Ringe $\{x\}$ mit dem Erzeugende x und mit den Relationen $px = x^3 = 0$.*

Bemerkung. Der in meiner Arbeit [8] gemeinte Ring $\{x\}$ (wobei $px = x(x^2+x) + (x^2+x) = 0$) ist kein Ring mit Eigenschaft E_1, da für $y = -2x - x^2$, $z = x + x^2$ notwendig $py = y^2 - y = 0$ und $pZ = Z^2 = 0$ gelten.

II. Herr L. Rédei hat alle Ringe R mit einzigen Erzeugenden bestimmt [5], deren sämtliche Unterringe zweiseitige Ideale in R sind. Die Frage der Bestimmung aller Ringe R, derer sämtliche von R verschiedene Unterringe die Gestalt $R \cdot r (r \in R)$ haben, wurde in unserer Note [7] im Frühling 1956 aufgeworfen und im Sommer 1958 gelöst. Solche Ringe nennen wir kurz Ringe mit Eigenschaft E_2. Es gilt also der

Satz 2. *Alle Ringe mit Eigenschaft E_2 sind:*

1) *Restklassenringe $\mathfrak{J}/(m)$ des Ringes $\mathfrak{J}$ der ganzen rationalen Zahlen nach dem Ideal (m), wobei $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;*

2) *Restklassenringe $(p)/(p^{k+1})$ des Ringes (p), welcher aus durch eine Primzahl p teilbaren ganzen rationalen Zahlen besteht, nach einem Ideal (p^{k+1}), wobei $k = 1, 2, \ldots$ ist;*

3) *Ringe $\{x\}$, mit den Relationen $px = x^3 = 0$;*

4) *Ringe $\{x, y\}$, mit den Relationen:*

$$px = py = x^2 = xy = y^2 - y = yx - x = 0 .$$

Bemerkungen. Der in der Arbeit [7] gemeinte Ring R, als eine direkte Summe $K_2 + K_2$ der zweielementigen Primkörper K_2, welche in R zweiseitige Ideale sind, besitzt die erwähnte Eigenschaft nicht, da aus $R = \{a\} + \{b\}$; $a + a = b + b = a^2 + a = b^2 + b = ab = ba = 0$ folgt, dass $\{a + b\}$ kein Linksideal in R ist.

Man kann auch zeigen, dass der Hauptsatz von [7] auch aus dem Satze 2. abgeleitet sein kann.

III. Etwas mehr kompliziert ist die explizite Lösung der folgenden Frage: es sind alle Ringe R zu bestimmen, welche eine solche Eigenschaft E_3 besitzen, dass sämtliche von R verschiedene Unterringe linksseitige Hauptideale $Rr + \mathfrak{J}r (r \in R)$ von R sind.

Satz 3. *Alle Ringe mit Eigenschaft E_3 sind:*

A. *unter den Ringen mit torsionsfreier additiver Gruppe — nur die Ringe mit zyklischer Gruppe;*

B. *unter den Ringen mit gemischter additiver Gruppe — nur die Ringe $\{x\}$ mit den Relationen $n(x^2 - nlx) = (x-1)(x^2 - nlx) = 0$, wobei $1 \in \mathfrak{J}$, $n \in \mathfrak{J}$, $l \in \mathfrak{J}$ und $n > 1$ eine quadratfreie Zahl ist;*

C. *unter den Ringen mit unendlicher periodischer Gruppe — nur die Zeroringe des Typus p^∞;*

D. *unter den (endlichen und unendlichen) Ringen mit Abel'scher elementarer p-Gruppe *) sind nur:*

---

*) Eine Abel'sche p-Gruppe G wird eine elementare p-Gruppe genannt, wenn die Ordnung jedes von Null verschiedenen Elementes von G eine fixierte Primzahl p ist. Eine solche Gruppe G ist also die direkte Summe von zyklischen Gruppen der Ordnung p.

1) *sämtliche Unterringe* *) *der Ringe* $R=\{x\}$ *mit* $px=x^4-x^3=0$,

2) *die Ringe* $R=\{x,y\}$, *mit* $px=py=x^2=xy=y^2=yx=0$,

3) *die Ringe* $R=\{x,y\}$, *mit* $px=py=x^2=xy=y^2-y=yx-x=0$,

4) *die Ringe* $R=\{x,y\}$, *mit* $px=py=x^3=y^3=xy=yx=x^2-ky^2=0$, *wobei* $p\neq 2$ *eine Primzahl ist, ferner* $k\in\mathfrak{J}$ *und* $(-k)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\ (\mathrm{mod}\,p)$ *ist;*

5) *die Ringe* $R=\{x,y\}$, *wobei* $px=py=x^3=y^3=xy=yx-x^2=$ $=x^2-ky^2=0$, *und für* $p=2$ *notwendig* $k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,p)$ *und für* $p\neq 2$ *notwendig die Kongruenz* $(k^2-4k)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\ (\mathrm{mod}\,p)$ *gilt,*

E. *unter den p – Ringen mit Abel'scher nicht elementarer p Gruppe—nur*

1) *die Ringe* $R=\{x\}$, *mit* $p^n x=x^2-p^f x=0$, $n\geqslant 2$ *und* $0\leqslant f\leqslant n$,

2) *die Ringe* $R=\{x\}$, *wobei* $p^n x=p(x^2-p^f x)=(x-1)(x^2-p^f x)=0$, $1\in\mathfrak{J}$, $n\geqslant 2$, $1\leqslant f\leqslant n$; *ist,*

F. *unter den endlichen Ringen mit additiver nicht p-Gruppe – nur die Ringe* $R=\sum R_p$, *wobei das Ideal* R_p *aus sämtlichen Elementen von p-Potenzordnung von* R *besteht, und* R_p *zu einem unter* E. *oder unter* D. 1) *gemeinten Ringe isomorph ist.*

Bemerkung. Aus dem Satze 3. kann man mehr als 16 nicht-triviale Folgerungen ableiten. Der Beweis benützt den Wedderburn-Artin'schen Struktursatz, ferner unseren früheren Satz [6], welche eine Verallgemeinerung der Arbeit [9] von T. Szele ist. In meiner Arbeit ([6], S. 331) muss man anstatt $RN=0$, $R=N$, $R^2=0$ richtig als $\mathfrak{J}N=0$, $R=N$, $\mathfrak{J}^2=\mathfrak{J}R=0$ lesen. Später folgt in [6] die weggebliebene englische Aussage: "Namely if $R/\mathfrak{J}$ had been a skewfield with the unity $e+\mathfrak{J}$, we should have obtained $0\neq e^2=e^3\in Re^2=R$, and $0\neq\mathfrak{J}=K\cdot e^2=Ke^3=\mathfrak{J}e\leqslant\mathfrak{J}R=0$ for some additive subgroup K of R^+, which is a contradiction".

IV. L. Fuchs und T. Szele haben beweist [3], das ein Ring R dann und nur dann ein halbeinfacher Ring mit Minimalbedingung für Linksideale ist, wenn jedes Linksideale von R ein rechtsseitiges Einzelement enthält. Wir werden diesen Satz hier verallgemeinern, indem wir aus der Tatsache, dass in einem Ringe R mit Minimumbedingung für Linksideale sämtliche Linksideale in der Gestalt $L=Re+L_1$ darstellbar sind **), wobei $e^2=e$ (nicht notwendig $=0$) und L_1 ein Nillinksideal ist, die folgende Definition ermitteln.

Definition. *R wird ein Ring mit Eigenschaft E_1 genannt, wenn jedes Linksideal von R die Gestalt $L=Re+L_1$ hat **), wobei L_1 mit lauter nilpotenten Elementen ist, und $e^2=e$.*

Als Resultat haben wir bekommen:

Satz 4. *Ein Ring R hat die Eigenschaft E_1 dann und nur dann, wenn R ein zweiseitiges Nilideal N besitzt, und R/N ein halbeinfacher Ring mit Minimalbedingung für Linksideale ist.*

*) Diese sind auch explizit darstellbar.

**) Die Summe ist direkt.

Als eine Folgerung, ergibt sich daraus der Hauptsatz von [3]. Der in dem Satze 4. erwähnte Ring ist ein halb-primärer Ring. Der unendliche zyklische Zeroring besitzt die Eigenschaft E_1 ohne die gemeinte Minimalbedingung für Linksideale.

MATHEMATISCHES INSTITUT, EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITÄT, BUDAPEST

SCHRIFTTUM

[1] E. Artin, C. F. Nesbitt, R. M. Thrall, *Rings with minimum condition*, University of Michigan, 1944.

[2] L. Fuchs, *On groups with finite classes of isomorphic subgroups*, Publ. Math. Debrecen **3** (1954), 243—252.

[3] L. Fuchs, T. Szele, *Contribution of semi-simple rings*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **3** (1952), 233—239.

[4] N. Jacobson, *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. (1956).

[5] L. Redei, *Vollidealringe im weiteren Sinn*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **3** (1952), 243—268.

[6] F. Szász, *Note on rings in which every proper left ideal is cyclic*, Fund. Math. **44** (1957), 330-332.

[7] — *Über die homomorphen Bilder des Ringes der ganzen Zahlen und über eine verwandte Ringfamilie*, Monatsch. f. Math. **61** (1957) 37-41.

[8] — *Ringe, deren von Null verschiedene endlich erzeugbare Unterringe untereinander isomorph sind*, Rend. Circ. Mat. Palermo II **6** (1957), 1-3.

[9] T. Szele, *Die Ringe ohne Linksideale*, Bul. Stii. Bucuresti, **1** (1950), 783-789.